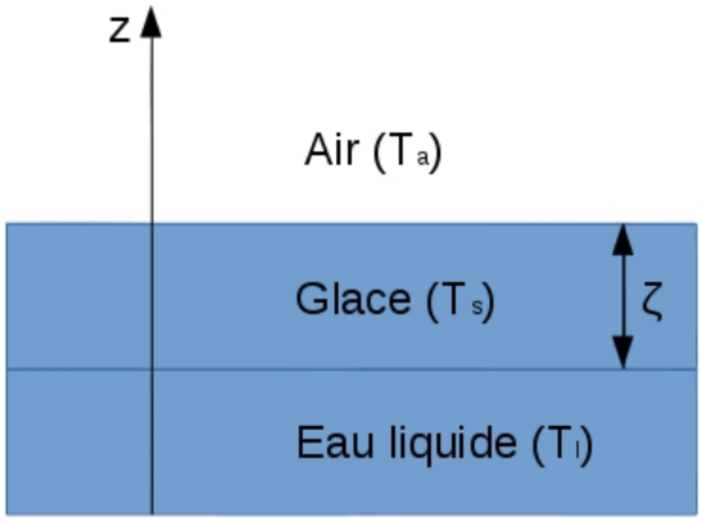
Patinage sur le lac de Joux

Le lac de Joux gèle fréquemment en hiver, pour le plus grand bonheur des patineurs. Nous allons nous intéresser ici au processus de formation de la glace sur le lac, qui se produit lorsque l'eau du lac est à la température de solidification $T_l = 0°\mathrm{C}$ et que la température de l'air T_a est inférieure à T_l. On négligera le transfert thermique convectif, c'est-à-dire que l'on considérera que les transferts de chaleur n'ont lieu que sous forme diffusive.



1. Calculer l'augmentation $\mathrm{d}\zeta$ de l'épaisseur de glace pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. On notera L_f la chaleur latente de fusion de la glace, ρ_g sa masse volumique, ζ l'épaisseur de la glace et λ sa conductivité thermique.
2. Intégrer l'expression de la question 1 pour obtenir l'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps.
3. Il est généralement admis qu'il est possible de patiner sur le lac si la couche de glace fait au moins 8 cm d'épaisseur. Calculer la durée τ au bout de laquelle la couche de glace atteint 8 cm lorsque $T_a = -20°\mathrm{C}$. On prendra $\rho_\mathrm{g} = 900\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $L_f = 334\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$ et $\lambda = 2{,}1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Solution

1. Considérons un élément cylindrique vertical de la couche de glace, de surface S et hauteur ζ. Pendant la durée $\mathrm{d}t$, l'eau liquide en contact avec la partie inférieure de cet élément gèle sur une hauteur $\mathrm{d}\zeta$. En gelant, l'eau dégage de la chaleur latente :

$$\delta Q_f = S\,\mathrm{d}\zeta\,\rho_\mathrm{g}\,L_f.$$

Cette chaleur est transférée à l'air à travers la glace sous forme de diffusion thermique. D'après la loi de Fourier, le flux de chaleur diffusif J_U s'écrit :

$$J_U = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z},$$

où T désigne la température dans la glace et z la coordonnée verticale. Ce flux doit être évalué à l'interface glace–eau, puisque c'est là où la chaleur latente apparaît. Or, ne connaissant pas le profil de température dans la glace, on ne peut pas calculer $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. On approxime donc ce gradient par $(T_a - T_l)/\zeta$, ce qui donne :

$$J_U \approx -\lambda\frac{T_a - T_l}{\zeta}.$$

On rappelle que J_U correspond à la chaleur qui traverse une surface unitaire par unité de temps. Pour obtenir la chaleur δQ_d qui pénètre le cylindre de glace de section S pendant $\mathrm{d}t$, il nous faut donc multiplier J_U par $\mathrm{d}t$ et par S :

$$\delta Q_d = J_U\, S\, \mathrm{d}t.$$

Puisque la chaleur δQ_d correspond à celle provenant de la fusion de la couche de glace d'épaisseur $\mathrm{d}\zeta$, on a : $\delta Q_d = \delta Q_f$, et donc :

$$S\,\mathrm{d}\zeta\,\rho_{\mathrm{g}}\,L_f = J_U\,S\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \zeta\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda(T_a - T_l)}{\rho_{\mathrm{g}} L_f}.$$

2. Dans l'équation obtenue à la question précédente, le terme de droite est constant. L'équation s'intègre donc facilement :

$$\begin{aligned} &\int_0^t \zeta\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \lambda\frac{T_l - T_a}{\rho_{\mathrm{g}} L_f}\,\mathrm{d}t' \\ \Rightarrow\quad &\frac{1}{2}\big(\zeta(t)\big)^2 = \lambda\frac{T_l - T_a}{\rho_{\mathrm{g}} L_f}t \\ \Rightarrow\quad &\zeta(t) = \sqrt{2\,\lambda\frac{T_l - T_a}{\rho_{\mathrm{g}} L_f}\,t}, \end{aligned}$$

où l'on a supposé que $\zeta(0) = 0$, c'est-à-dire que la couche de glace avait une épaisseur nulle à $t = 0$.

3. En inversant l'expression pour ζ trouvée à la question précédente, on trouve :

$$\tau = \frac{\rho_{\mathrm{g}} L_f \zeta^2}{2\lambda(T_l - T_a)} \approx 6{,}4\,\mathrm{h}.$$